Rendimientos y economías de escala a largo plazo

Long-term returns and economies of scale

Ronald Michael Mendoza Colque
Magister en Economía, Regulación y Competencia en los Servicios Públicos en la Universidad de Barcelona.
https://orcid.org/0000-0001-6983-1003

Auto corresponsal:
Ronald Michael Mendoza Colque
mendoza1286@gmail.com

Como citar:
Mendoza R. 2023). Rendimientos y economías de escala a largo plazo. Integración.

DOI: 10.36881/ri.v7iI.755

Resumen

La tipología de los rendimientos de la función de producción está relacionada con la tipología que puede presentar la función de costos medios de una empresa a largo plazo. A largo plazo todos los factores de producción son variables. El objetivo fue determinar la relación existente de los rendimientos que presenta la función de producción con las tipologías que puede presentar la función de costo medio a largo plazo. La metodología utilizada fue, por una parte, de una revisión bibliográfica, y, por otra parte, se valió del uso de la matemática para tener un carácter demostrativo, mediante el uso de funciones y ecuaciones económicas, aplicando derivadas para optimizar y ver tendencias. Los resultados muestran: ante la presencia de rendimientos crecientes a escala, existe economías de escala; mientras, si la función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala, existe deseconomías de escala; y finalmente, ante la presencia de rendimientos constantes a escala, existe economías de escala constante. En conclusión, la tipología de rendimientos de la función de producción tiene implicancia en las tipologías que presente la función de costo medio a largo plazo.

Palabras clave: función de producción de Cobb-Douglas, rendimientos de escala, economías de escala.

Abstract

The typology of the returns of the production function is related to the typology that the average cost function of a company can present in the long term. In the long term all factors of production are variable. The objective was to determine the existing relationship of the returns presented by the production function with the typologies that the long-term average cost function can present. The methodology used was, on the one hand, a bibliographic review, and, on the other hand, it used the use of mathematics to have a demonstrative nature, through the use of economic functions and equations, applying derivatives to optimize and see trends. The results show: in the presence of increasing returns to scale, there are economies of scale; while, if the production function presents decreasing returns to scale, there are diseconomies of scale; and finally, in the presence of constant returns to scale, there are economies of constant scale. In conclusion, the typology of returns of the production function has implications for the typologies presented by the long-term average cost function.

Key-words: Cobb-Douglas production function, returns to scale, economies of scale.

Clasificación JEL: C60, D20, D24.
JEL Classification: C60, D20, D24.

Introducción

Demandamos una gran cantidad de bienes para satisfacer nuestras necesidades a diario. Los productos que encontramos en las alacenas de los mercados, son ofrecidos por las empresas. La producción de bienes es efectuada a través de las unidades productivas llamadas empresas (Vargas, 2014), que su principal actividad es combinar determinada cantidad de insumos para transformar en bienes (Nicholson & Snyder, 2019).

El rol de la producción dentro de una empresa, se concibe como la unidad en donde se obtienen los bienes (Afanador, 2023; de la Hoz & González, 2000). “La producción de un bien se lleva a cabo por medio de diferentes combinaciones de los insumos de producción, las cuales están determinadas por la tecnología disponible” (Garavito, 2012. p.12); entendida como la relación entre el número de inputs y outputs (Pinos et al., 2021). “La función de producción es un concepto puramente microeconómico que describe la tecnología con la que se obtiene el máximo producto dados unos insumos”(Felipe & McCombie, 2005, p. 45); ello implica optimización y una asignación eficiente de recursos, donde la empresa busca maximizar recursos y beneficios.

La función de producción de la empresa está dada por q=f(k,l). Donde: q, cantidad de producción; k, cantidad de capital que posee la empresa (entenderemos por capital, las maquinarias, herramientas, y utensilios que posee la empresa) y l, la cantidad de trabajo con que cuenta la empresa. Según Garavito (2012, p.2), “llamamos factores de producción a las dotaciones de trabajo, tierra y capital fijo que dispone una empresa”, y también hace una diferencia entre factores primarios: trabajo y tierra; y factores secundarios a los distintos tipos de capital. Los factores de producción se desgastan en cada proceso productivo y deben ser repuestos para un nuevo proceso productivo.

En 1927, fue propuesta la función de producción de Cobb-Douglas para pronosticar el crecimiento económico, por el matemático Charles Cobb y el profesor de economía de la Universidad de Chicago Paul Douglas. La función de producción permite estimar la elasticidad de los factores de producción (Pinos et al., 2021), bajo el supuesto de un mercado de competencia perfecta (Briones et al., 2018).

Y, por otra parte, para producir un determinado bien, la empresa incurre en costos. Sea: c(q), la función del costo total de la empresa. La función costo está determinada por la cantidad de producción, q. El costo: c(q), será el costo mínimo para tener una combinación óptima de insumos para poder generar un nivel de producción (LeRoy & Meiners, 1990), combinando los factores productivos que permite el nivel de producción de "q" unidades del producto (Tirole, 2013). El comportamiento de la función de costos a largo plazo depende de la función de producción de la empresa, que es la relación entre la máxima producción alcanzable y las cantidades tanto de trabajo como de capital (Parkin & Loría, 2010).

Existen intervalos de tiempo bien marcados en el campo microeconómico: el corto plazo y largo plazo. Ambos difieren en la variabilidad de los factores de producción. La empresa se ubica a corto plazo, cuando al menos uno de los factores de producción es constante, la cantidad de capital no cambia y solo varía el factor de producción trabajo (Garavito, 2012; Varian, 2010); mientras que, a largo plazo, todos los factores de producción son variables; es decir, Garavito (2012), el empresario puede modificar el stock de capital e incluso puede incorporar nuevo procesos de producción; y por otra parte Parkin & Loría (2010) sostienen que el largo plazo, es un espacio temporal, en el que todos los factores de producción son variables, la empresa puede variar tanto la cantidad de capital que utilice como la cantidad de trabajo. “Las empresas operan en el corto plazo y planifican a largo plazo” (Garavito, 2012, p. 12).

La empresa busca minimizar sus costos de producción y maximizar el nivel de producción (Escobar, 2005). Dada esta dinámica de optimización de recursos de la empresa a largo plazo (Chiang, 2006), la empresa busca determinar en qué tipo de rendimiento los costos medios de producción empiezan a disminuir, mantenerse constantes o aumentar cuando aumenta cantidad de producción. Las necesidades son ilimitadas y los recursos con que cuenta la empresa son escasos (Mankiw, 2012). Por una parte la empresa utiliza una determinada tecnología, la más óptima posible para producir un determinado bien y por otra parte busca optimizar los costos de producción (Simon & Blume, 1994).

La función: q=f(k,l), a largo puede presentar tres tipos de rendimientos: i) rendimientos crecientes a escala, ii) rendimientos constantes a escala y, iii) rendimientos decrecientes a escala. Estos rendimientos, están asociados a economías de escala, economías constantes de escala y, economías decrecientes a escala. Aristizábal-Arias & Duque-Orrego (2006), afirman las

eISSN: 2790-2145 ISSN: 2618-1207.

economías de escala están en función con la capacidad de producción de la empresa.

Esta investigación, tuvo como objetivo determinar la relación existente de los rendimientos que presenta la función de producción con las tipologías que puede presentar la función de costos medio a largo plazo.

Materiales y metodología

La metodología utilizada para la investigación fue, por una parte, la revisión bibliográfica y por otra parte, se hizo uso de la matemática, para realizar los cálculos correspondientes de optimización y la aplicación de derivadas para determinar tendencias de la función del costo medio. Se ha ceñido la función de producción del tipo Cobb-Douglas. Esta función tiene características que se ajustan para cumplir con el objetivo de la investigación, como la continuidad y diferenciabilidad hasta segundo grado; y se tomó como referencia la función isocoste. Después de plantear el problema de optimización que se enfrenta la empresa a largo plazo, se realizó los cálculos matemáticos correspondientes, y después se hizo el análisis de la relación existente de los diferentes tipos de rendimiento que presenta la función de producción con la función del coste medio, para determinar si la empresa presenta economías de escala, economías constantes a escala y deseconomías de escala.

La función de producción y costos.

La función de producción.

La función de producción es la representación de la relación funcional entre los insumos y la cantidad de producción óptima. Muestra la producción máxima que se puede obtener haciendo uso de determinadas cantidades de factores de producción. Es una relación tecnológica y resume la tecnología más avanzada para obtener una determinada cantidad de producción (Madala & Miller, 1991). Podemos definir la producción en su sentido más amplio, el uso de recursos que permita transformar un bien en otro diferente (LeRoy & Meiners, 1990).

Sea la función de producción de Cobb-Douglas:

$$q = f(k, l) = Ak^{\alpha} l^{\beta}; \qquad \alpha, \beta > 0$$

Donde: q, cantidad de producción; k, cantidad de capital con que cuenta la empresa; l, cantidad de trabajo; y α,β, elasticidades de capital y trabajo respectivamente. La cantidad de producción está determinada por la cantidad de capital y trabajo con que cuenta la empresa. Ambos factores de producción son variables al largo plazo.

La función de producción a largo plazo lo podemos representar por una isocuanta. La isocuanta nos indica todas las combinaciones de factores de producción que generan exactamente q unidades de producción (Varian, 1992), que es una cantidad dada de producción y no un nivel de utilidad (Varian, 2010); por otra parte Simon & Blume (1994), consideran a la isocuanta como el conjunto de cantidad de producción. La isocuanta es estrictamente convexa y monótona.

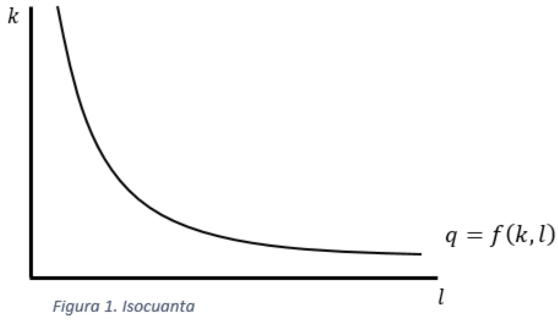


Figura 1. Isocuanta

Se tiene la isocuanta Cobb-Douglas: q=f(k,l)=Ak^α l^β;α,β>0. Si deseamos utilizar una determinada cantidad de capital y trabajo para obtener una cantidad de producción, y para ello podemos aumentar o reducir todos los factores de producción en una proporción, t>0 (Varian, 1992). Por otra parte Chiang (2006), sostiene una función f(.) es homogénea de "m", si cada una de las variables independientes es multiplicada por una constante "t\" "(t>0) altera el valor de la función en la proporción "t^m ", y en la misma línea Sydsaeter & Hammond (1996), sostienen: “El grado de homogeneidad de una función puede ser un número arbitrario, positivo, cero, o negativo”. Matemáticamente lo podemos expresar

Entonces podríamos tener los siguientes rendimientos a escala (Escobar, 2005; Nicholson & Snyder, 2019):

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Caso 1: α+β>1. La función de producción presenta rendimientos crecientes a escala. La función de producción es homogénea de grado mayor a 1.

$$q = f(k, l) = Ak^{\alpha} l^{\beta}$$
$$f(tk, tl) = t^{\alpha+\beta} q, \qquad t > 0$$

Caso 2: α+β=1. La función de producción presenta rendimientos constantes a escala. La función de producción es homogénea de grado 1.

$$q = f(k,l) = Ak^{\alpha}l^{\beta}$$

$$f(tk,tl) = tq, \quad t > 0$$

Caso 3: α+β<1. La función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala. La función de producción es homogénea de grado menor que 1.

$$q = f(k,l) = Ak^{\alpha}l^{\beta}$$

$$f(tk,tl) = t^{\alpha+\beta}q, \quad t > 0$$

La recta isocoste.

Sea una función de costo lineal expresada en función de los precios de los factores de producción y también en función a la cantidad de factores de producción que ha de utilizarse. Lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$c(k,l,w,R) = c(.) = wl + Rk$$

Donde: c(.), costo de producción; w, salario por cada unidad de trabajo; R, costo de alquiler por unidad de capital; k y l, factores de producción: capital y trabajo respectivamente. Los precios de los factores de producción son completamente exógenas al empresario (Chiang, 2006).

El mercado de los factores de producción tiene las características de un mercado de competencia perfecta. En el mercado de trabajo los trabajadores son homogéneos, cada trabajador tiene las mismas capacidades de producción, es decir tiene el mismo nivel de conocimiento; y con respecto al capital, todos los capitales existentes en el mercado son homogéneos también (Mora, 2009; Mejía-Matute et al., 2023). El empresario puede hacer uso de los trabajadores pagándole un salario "w" por unidad de trabajo; y también puede hacer uso del capital con un precio de alquiler de "R", por unidad de capital.

$$\frac{\partial c}{\partial l} = w, \quad \frac{\partial c}{\partial R} = R$$

La recta isocoste lo podemos representar en la Figura 2. Dada la combinación de demanda de los factores de producción, el costo siempre va a ser igual a "c".

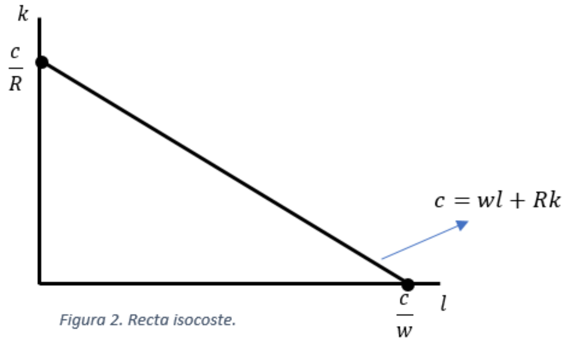


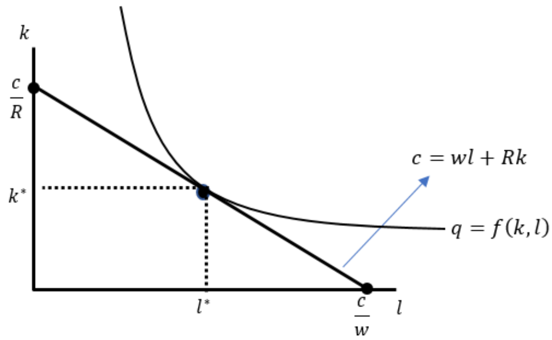
Figura 2. Recta isocoste.

El problema de la minimización.

La empresa se enfrenta a una situación de minimización de costos queriendo alcanzar un máximo nivel de producción. El punto óptimo es cuando la pendiente de la isocuanta sea igual a la pendiente de la recta isocoste (Chiang, 2006); es decir, el ratio de las productividades marginales será igual al ratio de las salarios de los factores de producción:

$$\frac{q_l}{q_k} = \frac{w}{R}$$

Gráficamente se tiene:



Matemáticamente el productor a largo plazo se va a enfrentar, al siguiente problema de optimización para encontrar el costo óptimo (Escobar, 2005):

$$\min_{\{k^*,l^*\}} c = wl + Rk$$

$$\text{s.a. } q = f(k,l) = Ak^{\alpha}l^{\beta}$$

eISSN: 2790-2145 ISSN: 2618-1207.

Siendo un problema de minimización con restricciones, se tiene:

$$\mathcal{L}(k,l,\lambda) = wl + Rk + \lambda\left(q - Ak^{\alpha}l^{\beta}\right)$$

Por condiciones de primer orden se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(k,l,\lambda)}{\partial k} = 0 \Rightarrow R - \lambda\alpha A k^{\alpha-1}l^{\beta} = 0 \ldots\ldots (i)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(k,l,\lambda)}{\partial l} = 0 \Rightarrow w - \lambda\beta A k^{\alpha}l^{\beta-1} = 0 \ldots\ldots (ii)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(k,l,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow q - A k^{\alpha}l^{\beta} = 0 \ldots\ldots (iii)$$

Resolviendo la ecuación (i) y (ii), se tiene la siguiente equivalencia:

$$\lambda = \lambda$$

$$\frac{R}{\alpha A k^{\alpha-1}l^{\beta}} = \frac{w}{\beta A k^{\alpha}l^{\beta-1}}$$

$$\frac{R}{\alpha A k^{\alpha-1}l^{\beta}} = \frac{w}{\beta A k^{\alpha}l^{\beta-1}}$$

$$k = \frac{w}{R}\frac{\alpha}{\beta} l \ldots\ldots (iv)$$

(iv) reemplazando en la ecuación (iii), se tiene los valores óptimos demandados de los factores de producción.

$$k^{*} = \frac{w^{\beta/(\alpha+\beta)}\alpha^{\beta/(\alpha+\beta)}q^{1/(\alpha+\beta)}}{A^{1/(\alpha+\beta)}\ R^{\beta/(\alpha+\beta)}\beta^{\beta/(\alpha+\beta)}};$$

$$l^{*} = \frac{R^{\alpha/(\alpha+\beta)}\beta^{\alpha/(\alpha+\beta)}q^{1/(\alpha+\beta)}}{A^{1/(\alpha+\beta)}w^{\alpha/(\alpha+\beta)}\alpha^{\alpha/(\alpha+\beta)}}$$

La función costo optima es:

$$c^{*} = wl^{*} + Rk^{*}$$

Sea la función de costo:

$$c(A,w,R,q) = q^{1/(\alpha+\beta)}\left[(\alpha+\beta)\frac{w^{\beta/(\alpha+\beta)}R^{\alpha/(\alpha+\beta)}}{A^{1/(\alpha+\beta)}\alpha^{\alpha/(\alpha+\beta)}\beta^{\beta/(\alpha+\beta)}}\right]$$

Si:

$$M = \left[(\alpha+\beta)\frac{w^{\beta/(\alpha+\beta)}R^{\alpha/(\alpha+\beta)}}{A^{1/(\alpha+\beta)}\alpha^{\alpha/(\alpha+\beta)}\beta^{\beta/(\alpha+\beta)}}\right]$$

Entonces se tiene:

$$c(q) = Mq^{1/(\alpha+\beta)}$$

La curva de costo medio a largo plazo, es la relación entre el costo total medio más bajo posible y la producción cuando varían tanto el tamaño de la planta como la cantidad de trabajo (Parkin & Loría, 2010).

La curva de costo medio a largo plazo es una curva de planeación. Indica a la empresa el tamaño de planta y la cantidad de trabajo que debe usar en cada cantidad de producción para minimizar el costo medio (Parkin & Loría, 2010).

Resultados

Sea la función del costo medio:

$$\boldsymbol{CMe(q)} = \frac{Mq^{1/(\alpha+\beta)}}{q}$$

$$\boldsymbol{CMe(q)} = Mq^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)}}, q > 0$$

El comportamiento de la trayectoria de la función de costo medio estará determinado por cuanto es el resultado de: "α+β". Podemos tener tres casos:

Caso 1: α+β>1. La función del coste medio es decreciente. A mayor cantidad de producción el costo medio disminuye. Tenemos economías de escala.

$$\frac{\partial CMe(q)}{\partial q} = \frac{1-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)}Mq^{\frac{1-2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} = \frac{\partial c(q)}{\partial q} < 0$$

Caso 2: α+β=1. La función del costo medio tiene una tendencia a ser constante. Tenemos la presencia de economías constante de escala dentro de la empresa.

$$\frac{\partial CMe(q)}{\partial q} = \frac{1-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)}Mq^{\frac{1-2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} = \frac{\partial c(q)}{\partial q} = 0$$

Caso 3: α+β<1. La función del costo medio tiene una tendencia creciente a medida que aumenta el nivel de producción. Tenemos deseconomías de escala.

$$\frac{\partial CMe(q)}{\partial q} = \frac{1-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)} Mq^{\frac{1-2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} = \frac{\partial c(q)}{\partial q} > 0$$

Discusión

Según Revollo & Londoño (2011): "Las economías de escala describen el comportamiento de los costos de acuerdo con una variación en los productos y otras variables relacionadas con el tamaño", mientras para Parkin & Loría (2010) las economías de escala son atributos tecnológicos de una empresa teniendo como efecto estos atributos en una disminución del costo medio a medida que la cantidad de producción aumenta. Por otra parte Ramirez et al. (2010) sostienen que para generar economías de escala implica que sus funciones de producción y costos deben exhibir rendimientos crecientes, y que son los aprendizajes y capacidades empresariales los que les permiten reducir sus costos respecto a la producción acumulada. A medida que aumenta la cantidad de producción disminuye los costos medios: $(\partial c(q))/\partial q<0$. La función de producción presenta rendimientos crecientes a escala. Es una situación conveniente para la empresa, ya que los costos medios disminuyen a mayor nivel de producción. Para Ferro & Lentini (2010), las economías de escala se vinculan con la tendencia decreciente de los costos medios en el largo plazo a medida que la producción aumenta.

Por otra parte cuando: $(\partial c(q))/\partial q=0$. El costo medio de la empresa se mantiene constante a medida que aumenta la cantidad de producción. Implica que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala. Los rendimientos constantes a escala son atributos de la tecnología de una empresa que mantienen un costo total medio constante conforme aumenta la producción (Parkin & Loría, 2010).

Y finalmente, las deseconomías de escala son atributos de la tecnología de una empresa que conducen a un aumento del costo total medio conforme la producción aumenta (Parkin & Loría, 2010). El costo total medio mínimo para una planta más grande ocurre a un mayor nivel de producción que en el caso de una planta más pequeña; esto se debe a que la planta más grande tiene un costo fijo total mayor y, por lo tanto, un costo fijo medio mayor para cualquier nivel determinado de producción (Parkin & Loría, 2010). Hay deseconomías de escala cuando esos costos suben con el aumento de la producción (Ferro & Lentini, 2010). Si: $(\partial c(q))/\partial q>0$, muestra un aumento del costo medio a medida que aumenta la cantidad de producción de la empresa. Es un tramo donde a la empresa no le conviene aumentar la cantidad de producción.

Conclusiones

Los rendimientos a escala de la función de producción son relevantes para la empresa a largo plazo y son: rendimientos crecientes a escala, rendimientos constantes a escala y rendimientos decrecientes a escala.

Los rendimientos crecientes a escala, está relacionado con la presencia de economías de escala dentro de la empresa; mientras que, si la función de producción presenta rendimientos decrecientes, existe una presencia de deseconomías de escala dentro de la empresa; y finalmente, cuando se tiene la presencia de rendimientos constantes de escala dentro de la empresa, tendremos rendimientos constantes de escala.

Referencias Bibliográficas

Afanador, N. (2023). Historia de la producción y sus retos en la era actual. Región Científica, 2(1), 1–15. https://doi.org/10.58763/rc202315

Aristizábal-Arias, C., & Duque-Orrego, H. (2006). Determinación de economías de escala en el proceso de beneficio del café en Colombia. 57(1), 17–30. https://biblioteca.cenicafe.org/handle/10778/198

Bank, A. D. (2005). La función de producción agregada en retrospectiva. Investigación Económica, LXIV(253), 43–88.

Briones, X. F., Molero, L. E., & Calderón, O. X. (2018). La función de producción Cobb-Douglas en el Ecuador. Tendencias, 19(2), 45–73. https://doi.org/10.22267/rtend.181902.97

Chiang, A. C. (2006). Métodos fundamentales de economía matemática (Cuarta edi). McGraw-Hill/Interamerica editores, S.A. de C.V.

de la Hoz, M. A., & González, T. M. (2000). Introducción al análisis matemático para la economía. Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz.

 eISSN: 2790-2145 ISSN: 2618-1207.

Escobar, D. (2005). Economía Matemática (Segunda ed). Alfaomega Colombiana S.A.

Ferro, G., & Lentini, E. (2010). Economías de escala en los servicios de agua potable y alcantarillado. In CEPAL Documentos de Proyectos. https://repositorio.cepal.org/handle/11362/3831

Garavito, C. (2012). Microeconomía: teoría de la empresa (No. 338; Documento de Trabajo). http://www.pucp.edu.pe/departamento/economia/images/documentos/DDD338.pdf

LeRoy, R., & Meiners, R. E. (1990). Microeconomía. In Microeconomics (Tercera edición). McGraw-Hill/Interaméricana de México, S.A.

Madala, G. S., & Miller, E. (1991). Microeconomía teoría y aplicaciones. McGraw-Hill.

Mankiw, G. N. (2012). Principios de economía. In Mikrobiolohichnyi zhurnal (Sexta edic, Vol. 28, Issue 3). Cengage Learning Editores S.A.

Mejía-Matute, S. R., Pinos-Luzuriaga, L. G., & Tonon-Ordóñez, L. B. (2023). Función de Producción Cobb-Douglas . Una Revisión Bibliográfica. Economía y Negocios, 14(02), 74–95. https://doi.org/https://doi.org/10.29019/eyn.v14i2.1124

Mora, A. (2009). Función de producción, producción conjunta y salarios (Revisión crítica del paradigma de la productividad marginal). Nómadas. Critical Journal of Social and Juridical Sciences, 24(4). http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=18112178015

Nicholson, W., & Snyder, C. (2019). Teoría microeconómica: principios básicos y ampliaciones. In Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology (11a. edici, Vol. 224, Issue 11). Cengage Learning Editores S.A.

Parkin, M., & Loría, E. (2010). Microeconomia versión para América Latina (G. Domínguez (ed.); Novena edición). Pearson Educación de México, S.A.

Pinos, L., Mejía-Matute, S., Tonon, L., & Proaño, B. (2021). La función de producción Cobb-Douglas: Caso del sector C23 de fabricación de productos minerales no metálicos. Boletín Del Observatorio Empresarial de La Universidad Del Azuay, 2(3), 31–45.

Ramirez, N., Mungaray-Lagarda, A., Ramirez, M., & Flores, M. T. (2010). Economías de escala y rendimientos crecientes. Una aplicación en microempresas mexicanas. Economía Mexicana NUEVA ÉPOCA, XIX(2), 213–230.

Revollo, D., & Londoño, G. (2011). Análisis de las economías de escala y alcance en los servicios de acueducto y alcantarillado en Colombia. Desarrollo y Sociedad, 66, 145–182. https://doi.org/10.13043/dys.66.5

Simon, C. J., & Blume, L. (1994). Mathematics for Economists. In W. W. Norton & Company, Inc. (First edit, Issue 56). Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. https://doi.org/10.2307/2550209

Sydsaeter, K., & Hammond, P. J. (1996). Matemáticas par el análisis económico. Prentice Hall.

Tirole, J. (2013). La teoría de la organización industrial. In Journal of Chemical Information and Modeling (Vol. 53, Issue 9, pp. 1689–1699).

Vargas, B. E. (2014). La función de producción de Cobb-Douglas. Fides Et Ratio, 8, 67–74. http://www.scielo.org.bo/pdf/rfer/v8n8/v8n8_a06.pdf

Varian, H. R. (1992). Análisis microeconómico. Antoni Bosch Editor.

Varian, H. R. (2010). Microeocnomia intermedia: un enfoque actual (Octava edi). Antoni Bosch Editor S.A.